

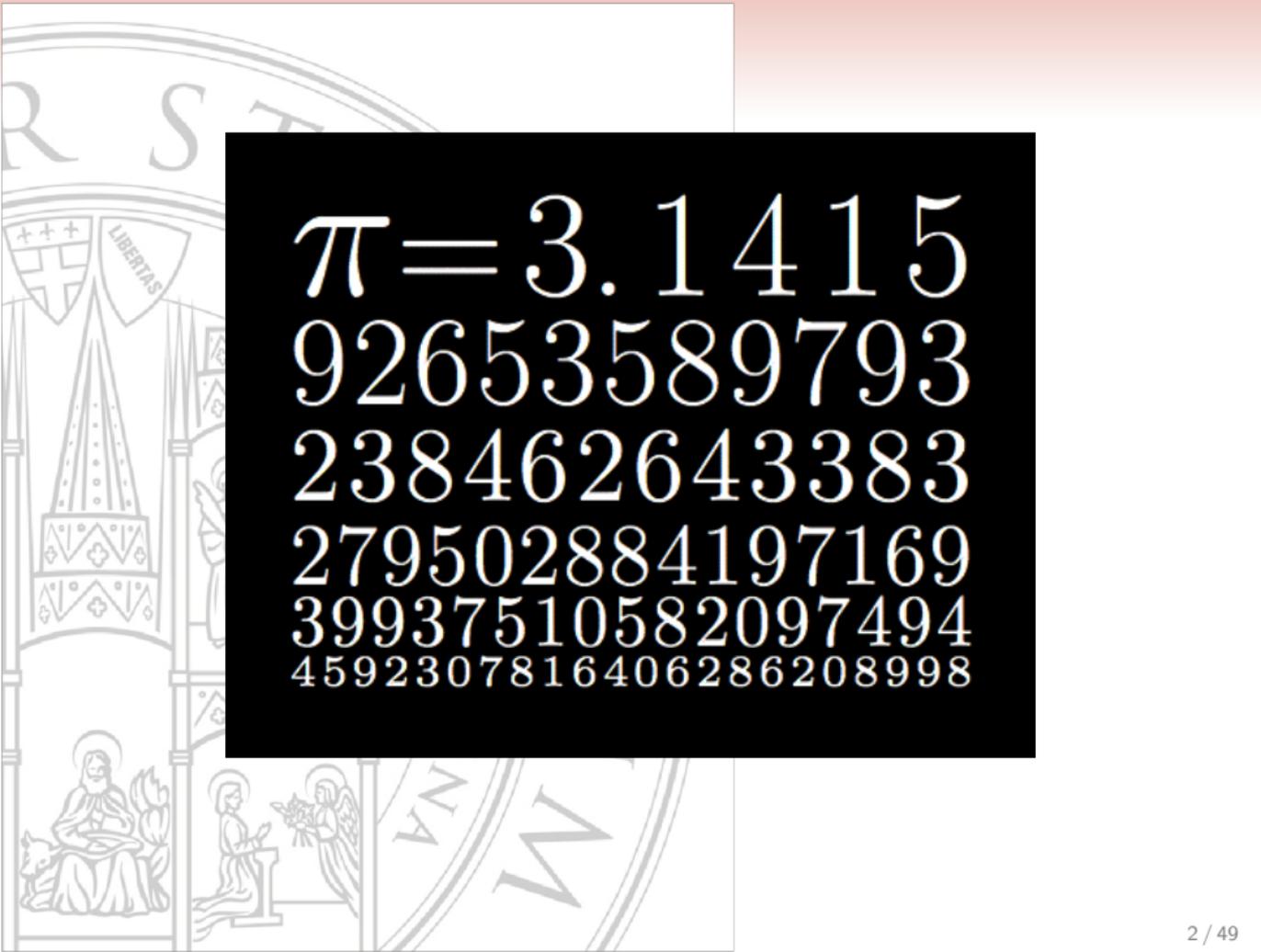
Alan Turing pioniere dell'era digitale

Il calcolo e le sue limitazioni

Simone Martini

Dipartimento di Informatica: Scienza e Ingegneria
Alma mater studiorum • Università di Bologna

scienzagiovane
27 ottobre 2012



$\pi = 3.1415$
92653589793
238462643383
279502884197169
39937510582097494
4592307816406286208998

3.

14159265635 891392386 264031979 502884197 693993570 10562007494 59237801494 0628826099 9528034825 241170069 821482965 382230667 093844066

055622172 538945818 4811174892 8110271295 8521956965 9444281350 564823 378781761 281121 23316169 698858244 2347258456 846224622

346034810 454326642 133933726 0249141273 724587006 0631558817 4881252020 0356887060 113006330 0682094652 1384144951 0

9411510694 330527370 559591953 0521861173 9183261117 5130511854 074623790 27495735 188572724 801272380 3011940 263833762 406566840

860213964 639524247 1700191206 6793931027 05392117 176 203176753 844781846 7699405132 0006658112 4526356682 778571342 577890611 293171872

448844001 224652401 45214991663423 45214991663423 45214991663423 45214991663423 45214991663423 45214991663423 45214991663423 45214991663423 45214991663423

0597317328 1069031859 5204549455 3469083028 4252230825 3446880536 2619311881 7101000313 7838752886 5857332083 8142061717 7669143703 598253040

2875546873 1159562883 8823337875 8375196776 185780532 171226806 1030192787 6811195909 216420198 3980265220 1064688501 267856901 338128706

823301952 033018520 889697726 2959413891 24972171252 8347913151 4557485274 454150869 5062065331 6881722894 8097503681 7154634736 4091310255

6824000277 018711306 984624012 8581861832 633706210 4716191842 956499148 189746786 6607275184 9448255334 2149906922 74724268 154522496

931387702 8099152104 517656896 660240580 815019351 2152834204 3558784204 7496473234 941992728 4026999272 8782354181 6360003414 216419132

4586130 2801182097 455 57670483 805459458 586929959 592731207 750302955 311563449 872027559 02384608 02384608 49911988 347977538 636807420

542572825 51841875 487298077 1277930801 816478061 016428192 103921077 1273014144 1973588548 150 81931573 5252521340 1571489486 9385832329

074041433 544762434 88 26527328 324 34088101 71 0488333 734 64965 44925362 95762869 608277193 6083784 6083784 82786780 8194541008

388778360 950800642 2512520511 739294868 084124886 269450424 196258022 2106811983 0674427882 2030194445 0471231713 8880060536 3214917287

487764675 5184398 1389 088582345 9958133904 780275909 946576408 95 1204883 9833259070 952822620 524698407 2871947826 2846024007 46 900024001

383944345 530558840 4458 100985544 14268920 90 6592593072 2109648511 5700839324 4150738923 9527295448 80016175 92048482 67 92048482

1747150991 1869252459 5395933410 902225684 849872736 446958498 449867278 446958498 449867278 446958498 449867278 446958498 449867278 446958498 449867278

129619604 41804885 58484345 420272258 284884815 8465028506 0168427304 5226746767 889526132 5226 4525499546 678227298 3645658611 1534987700

774564903 59473634568 1734241125 1150269647 9451095696 9471006936 78971089314 5699136687 2881248046 60 15013836 901782860 920474609 1782493895

900714908 875682623 8182908788 319 21484258 226 62558828 75840 142470 775 148152132 7984145132 7442342436 5429389441 9526589782 1051141354

2357395231 13427166212 533949938 2314428624 840371817 0142576603 8492709032 4074207341 057839056 8000 10832748 084748896 9321447 25867819435

6942301845 319104481 0053706146 806742917 8191197939 9520149196 6342875444 084745123 7819211799 9830910159 956184165 1426912309 4490490718

88443251 587545206 95 14032681 932160881 930142039 3216718859 956389377 030309067 6027734872 218265299 681501425 681501425 681501425 681501425

504148589 252014974 44 28527328 324 34088101 71 0488333 734 64965 44925362 95762869 608277193 6083784 6083784 82786780 8194541008

4011097120 6280439039 799515671 5770042033 7896936007 230583671 7635941827 3125 147120 5329281918 281661528 3740 57103916 4148488291 6447605075

520799572 0917567116 17 7229109816 81 9091528017 3506712748 6382228718 3520935396 5725121083 579151368 8209144421 0067513508 1110114216 671138990

1865516398 3159107016 515 1437057616 35 15956508 4009098959 9823394525 283316350 748718533 806245195 89631239 308967504 2044752590

1155 45 458898888 4258003962 1810340999572 23369092221 428489895751 3232987239 9712848013 572365408 32 47480670 85359142 408120203

624037589 8526347431 471 6291132766 180037334 403073409 1120191350 2033360199 179 101100 44029251 6328444485 963769636 232396848 2135565700

2131440576 8572624334 4189300368 842826410 1732299780 348718915 4411010448 8325257 6210526827 2111660296 6655739269 4471105578 376348820

935109895 269126056 479912059 479912059 456326020 8558130729 2606599678 9811719145 3348850248 113657867 53204446 8063026276 7717185950 4545296541

716 43444494 210237 874 58644890 334022 9474 7044 2042 90891939 9458 51140 112700047 39892485 5546588079 17

702868360 634328578 589830525 8080330657 5740679545 716372524 2021149557 6158140025 0126228594 1302164215 509792923 090719564 3742051878

587513575 1496965454 79110551 2996148903 04639047 13 2982107340 4375189573 3061458901 0389713111 790429782 5841369120 186891516 18128708659

048109412 1472213179 476477282 241425484 5403321571 8530614228 8137958943 0633217518 297866223 712715960 27176692547 8478389896 094495410

654048243 8693979003 789026821 442652007 3006967129 018637683 7166416274 8888007869 250293228 2181040317 211860294 1900442296 611 198377

7992250939 780541934 444737744 8213986 1089888887 4132804271 5695162396 5884573021 631598193 951873581 294167220 478827429 2465343860

808972628 239894089 640042845 403704163 149595974 0942432379 0790709779 423265202 216886578 379662030 5937764 576112697 8011581861 17

57820732 3344894281 5128272037 343146533 7774 1651 398068518 770392903 41952154 341889485 4743465738 316249304 91175 8109 17171088

3877343177 207549545 322077902 12005166 096284009 2636019759 8828181332 3166636528 619326683 3806273269 630054478 280350450 772355410

85548702 7008143562 4014157180 624436267 9456127531 813407830 336242237 8304497358 243726033 531147719 2606838134 477867905 070306339

377071087 0408913371 4841442822 7364889 704458784 7780297 127 512607371 87007707 157234447 860577034 2043969113 8350493187 1280442510

105565 7768 0894113532 17809506 813141470 478378 75818328629 3020011458 3941419852 13494354 0575863 486202039 51058355 11760303 30489008

8584783185 105277560 8887844624 826895706 0395322773 4800340020 0059078519 2105477009 164509226 6760449025 274204203 280566191 90642435372

1313595864 508877240 206187676 795204616 82522571 9 5429162391 9306453577 991403730 4328728528 889639587 847921074 642635126 501700914

913571136 9410911290 3251910760 208520281 878581887 7058429725 9167781314 8699900919 2118997173 278478847 86980480 3770242420 16513009540

116812334 3503888 218992933 45 172302 13 1389086961 1814849745 19861122893 23321 391171 4504009390 960 1666404 1989097 107

505298341 874078660 881833810 228334580 0488028203 030213219 7155184306 345600576 8282949304 3776552910 397551564 385936843 983083047

451199663 8518153480 5888338821 867253340 2830871123 2827892 125 07126246 2326963698 899538281 8745627010 218154661 013496715 8811897300

811980047 304723910 836284943 193950790 1968696395 5243300544 058088051 956732022 911330339 588403440 980299591 024633543 9120041947

8545895881 0291385458 9783378 021421817 211172324 343984028 18420816 88848 6804 8324 8296 6756 8296 6756 8296 6756 8296 6756 8296 6756 8296 6756

7071014594 051655370 6866273337 995851 1562 5784322988 873231989 8775141595 781119638 3300640087 3088121262 87649827 864047764 519045919

737425629 010490378 178 1988835038 146574128 0492654879 158514532 347873330 940688384 3634565319 4988419270 563872031 847232083 7801121029

913367308 208843879 3879016295 1541337144 486283027 02108901475 4888476535 716487739 479025040 7571555278 196636232 382648640 136858159

074202030 3182719055 643826857 87655303 541911286 223415828 223415828 308475858 308475858 308475858 308475858 308475858 308475858 308475858 308475858

7435383256 918078754 8181183463 687957610 1068155310 445212743 9124544954 238828880 134084148 36373790691 205121401 043027253 8607648238

344314662 518978786 52 17187786 980314890 4911085759 4921431982 91942900 4907123604 64884841171 940326918 404348791 333894527 3399528026

659122588 55592 15755 01071203 212886320 202925220 1187167975 82304 51823 51815634 94765188 609 88114101 0029987801 8919029470 302848204

0104140792 886215706 2451870908 7006992683 120864181 718065356 725253297 5328611290 42488718162 5820768517 9568474880 262262849 0304158722

980534986 9052269714 878823074 2002224253 3885626476 914905562 8450209127 57102840 799806836 82548806 8200455661 0172867026 6047659004

29004581 5862585305 317422147 0336931378 517869040 708897141 758456334 799338571 11 138845548 788831020 4587867 16 60348191 956200939

800131029 81151589 33843798994 241733063 9480587593 1481486859 293105 118260270 013177512 0585 130836906 9273221002 2033220904

34847854 122147733 89041456 1191819560 8450083109 033751173 547191850 844409828 95812518928 82822488 8881444581 2314693591 88425284082 1242407014

159088288 478268995 905744096 175884317 5223707988 3400805365 9849175471 3818839994 807478876 5861658276 584838584 3142775860 902009517

028329716 34455621296 404323161 6100695104 1240006597 8551278178 1828292041 078442360 800719396 761883249 229279691 987518712 728759074

255570589 045559104458 302540472 0490114196 823282631 2014197907 386025152 9417989 360025152 9417989 360025152 9417989 360025152 9417989 360025152

7079119153 267343022 24188042 636354800 044802070 496248017 9289847669 7583183271 3142517029 620348862 7668910323 2604376568 4035799848

925650496 8183602935 380292045 958879695 365340480 3042168554 3755890045 6328822505 452556506 448246515 8754911962 1840335828 53374584

809041153 150529526170 378029471 2076951447 3942500298 9699049056 567612186 5196973738 623626125 214930268 6922221327 48892186 3964202967

007075569 51460389130 0788878128 4235223229 21689 4235223229 21689 4235223229 21689 4235223229 21689 4235223229 21689 4235223229 21689 4235223229 21689 4235223229

42041153079 8297830786 70944456 41560319471 2543709009 703861257 124980467 215 8621148 8881444581 231636591 86425284082 1242407014

214870573 510550801 809096603 027843670 736014127 31899843452 1561050070 270562326 6021786448 3064876118 1031305273 205427426 4501386347 452366510

705827485 2289159147 8207582959 8207582959 8207582959 8207582959 8207582959 8207582959 8207582959 8207582959 8207582959 8207582959 8207582959 8207582959

07046911209 140933071 254580160 128602102 927645791 067929265 2048875726 8110125483 6989982259 698988192 050010165 526537586

Numeri calcolabili

- Cosa vuole dire “avere” un numero reale?
- Parte decimale zero: interi.
- Parte decimale finita, o periodica: frazioni.
- Parte decimale infinita, non periodica ma ottenibile con un procedimento meccanico deterministico: p.e. $\sqrt{2}$, π ,
- Esistono numeri che *non* sono calcolabili?
Cioè: la cui parte decimale non è ottenibile con un procedimento meccanico deterministico?

Cos'è un procedimento meccanico deterministico?

Numeri calcolabili

- Cosa vuole dire “avere” un numero reale?
- Parte decimale zero: **interi**.
- Parte decimale finita, o periodica: **frazioni**.
- Parte decimale infinita, non periodica ma ottenibile con un procedimento meccanico deterministico: p.e. $\sqrt{2}$, π ,
- Esistono numeri che *non* sono calcolabili?
Cioè: la cui parte decimale non è ottenibile con un procedimento meccanico deterministico?

Cos'è un procedimento meccanico deterministico?

Numeri calcolabili

- Cosa vuole dire “avere” un numero reale?
- Parte decimale zero: **interi**.
- Parte decimale finita, o periodica: **frazioni**.
- Parte decimale infinita, non periodica ma ottenibile con un procedimento meccanico deterministico: p.e. $\sqrt{2}$, π ,
- Esistono numeri che *non* sono calcolabili?
Cioè: la cui parte decimale non è ottenibile con un procedimento meccanico deterministico?

Cos'è un procedimento meccanico deterministico?

Numeri calcolabili

- Cosa vuole dire “avere” un numero reale?
- Parte decimale zero: **interi**.
- Parte decimale finita, o periodica: **frazioni**.
- Parte decimale infinita, non periodica ma ottenibile con un procedimento meccanico deterministico: p.e. $\sqrt{2}$, π ,
- Esistono numeri che **non** sono calcolabili?
Cioè: la cui parte decimale non è ottenibile con un procedimento meccanico deterministico?

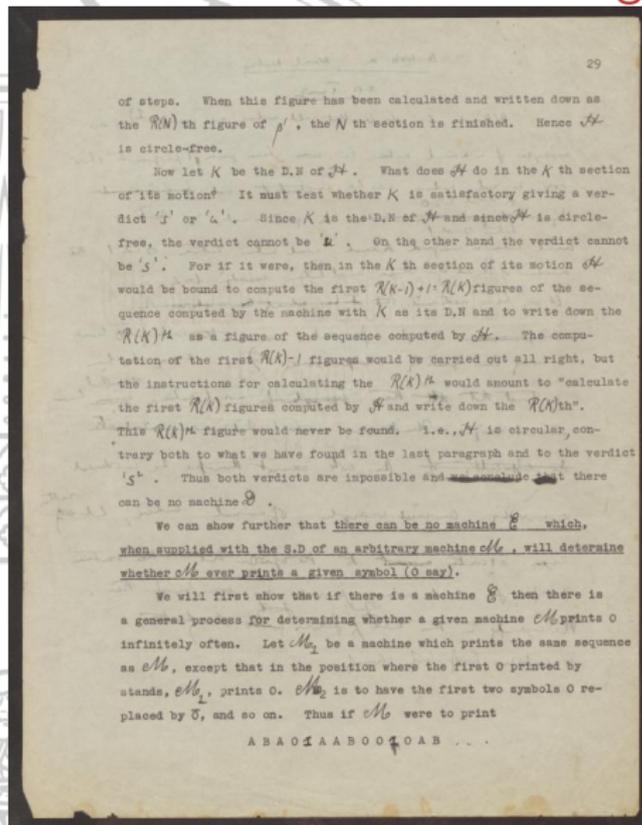
*Cos'è un **procedimento meccanico deterministico**?*

Numeri calcolabili

- Cosa vuole dire “avere” un numero reale?
- Parte decimale zero: **interi**.
- Parte decimale finita, o periodica: **frazioni**.
- Parte decimale infinita, non periodica ma ottenibile con un procedimento meccanico deterministico: p.e. $\sqrt{2}$, π ,
- Esistono numeri che **non** sono calcolabili?
Cioè: la cui parte decimale non è ottenibile con un procedimento meccanico deterministico?

Cos'è un **procedimento meccanico deterministico**?

1936: Cosa significa far di conto?



*On Computable Numbers,
with an Application to the
Entscheidungsproblem,
Proc. Lond. Math. Soc. (2)
42 pp. 230-265 (1936)*

Ben prima delle macchine che calcolano...

- Primo calcolatore “universale” **elettromeccanico**:
Z3, 1941; Konrad Zuse, Germania.
- Primo calcolatore “universale” **elettronico**:
ENIAC, 1946; University of Pennsylvania's

Imitiamo un contabile...
cioè un *computer*!



Imitiamo un contabile...
cioè un *computer*!

				2	7	3	+
				2	1	8	+
					1	1	=

Imitiamo un contabile...
cioè un *computer*!

				2	7	3	+
				2	1	8	+
					1	1	=

Imitiamo un contabile...
cioè un *computer*!

				2	7	3	+
				2	1	8	+
					1	1	=

Imitiamo un contabile...
cioè un *computer*!

				2	7	3	+
				2	1	8	+
					1	1	=

Imitiamo un contabile...
cioè un *computer*!

				2	7	3	+
				2	1	8	+
					1	1	=

Imitiamo un contabile...
cioè un *computer*!

				2	7	3	+
				2	1	8	+
					1	1	=
						2	

Imitiamo un contabile...
cioè un *computer*!

					1		
				2	7	3	+
				2	1	8	+
					1	1	=
						2	

Imitiamo un contabile...
cioè un *computer*!

					1		
				2	7	3	+
				2	1	8	+
					1	1	=
						2	

Imitiamo un contabile...
cioè un *computer*!

					1		
				2	7	3	+
				2	1	8	+
					1	1	=
						2	

Imitiamo un contabile...
cioè un *computer*!

					1		
				2	7	3	+
				2	1	8	+
					1	1	=
						2	

Imitiamo un contabile...
cioè un *computer*!

					1		
				2	7	3	+
				2	1	8	+
					1	1	=
					0	2	

Imitiamo un contabile...
cioè un *computer*!

				1	1		
				2	7	3	+
				2	1	8	+
					1	1	=
					0	2	

Imitiamo un contabile...
cioè un *computer*!

				1	1		
				2	7	3	+
				2	1	8	+
					1	1	=
					0	2	

Imitiamo un contabile...
cioè un *computer*!

				1	1		
				2	7	3	+
				2	1	8	+
					1	1	=
					0	2	

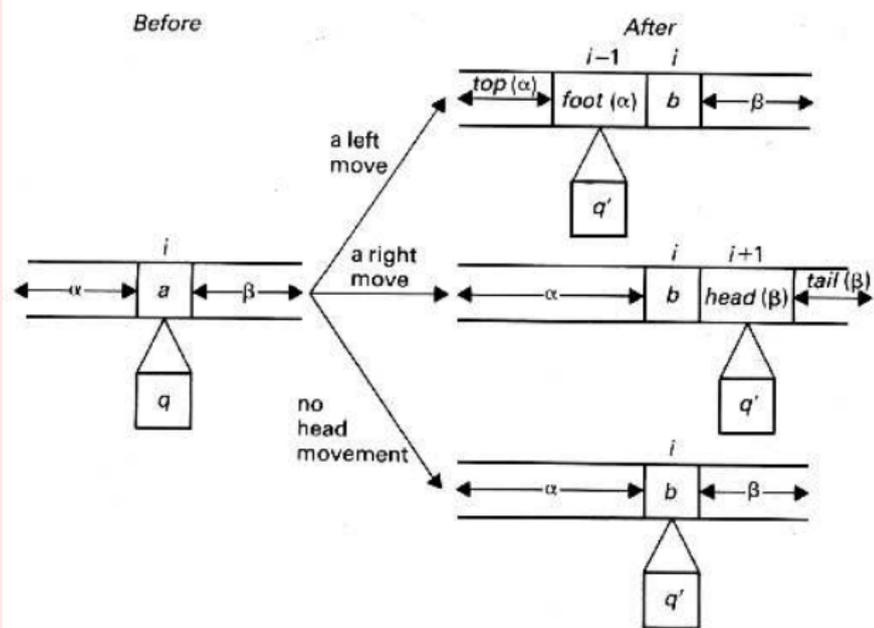
Imitiamo un contabile...
cioè un *computer*!

				1	1		
				2	7	3	+
				2	1	8	+
				0	1	1	=
					0	2	

Imitiamo un contabile...
cioè un *computer*!

				1	1		
				2	7	3	+
				2	1	8	+
				0	1	1	=
				5	0	2	

La macchina di Turing



Le **quintuple**: (q, a, q', b, D) , con $D \in \{\leftarrow, \rightarrow, -\}$

La macchina di Turing: esempio

				1			
				2	7	3	+
				2	1	8	+
					1	1	=
					0	2	

Una *quintupla*: (q, a, q', b, D) :

- 1 q : ricordo parziale 3
- 2 a : vedo 2
- 3 q' : ricordo parziale 5
- 4 b : lascio invariato 2
- 5 $D = \downarrow$: mi sposto una casella in basso

La macchina di Turing: esempio

				1			
				2	7	3	+
				2	1	8	+
				0	1	1	=
					0	2	

Una *quintupla*: (q, a, q', b, D) :

- 1 q : ricordo parziale 5
- 2 a : vedo casella vuota
- 3 q' : ricordo parziale 5
- 4 b : scrivo 0
- 5 $D = \downarrow$: mi sposto una casella in basso

La macchina di Turing, 2

- Alfabeto finito
- Stati interni in numero finito
- Operazioni: elementare **symbol pushing**
- Decisioni basate su informazioni **locali**, dunque finite
- **Descrizione finita** di
 - di una macchina (e del suo “programma”)
 - delle configurazioni di una singola computazione
- Dunque maneggiabile essa stessa da una macchina.

La MdT del successore

Per esempio: dato #0011#, calcolare #0100#

- Testina a destra sull'ultima cifra
- Alfabeto: $\{0, 1, \#\}$
- Stati: $\{q_0, q_1\}$
- Stato iniziale: q_0
- Programma:

$(q_0, 1, q_0, 0, \leftarrow)$

$(q_0, 0, q_1, 1, -)$

$(q_0, \#, q_1, 1, -)$

La MdT del successore

Per esempio: dato #0011#, calcolare #0100#

- Testina a destra sull'ultima cifra
- Alfabeto: $\{0, 1, \#\}$
- Stati: $\{q_0, q_1\}$
- Stato iniziale: q_0
- Programma:

$(q_0, 1, q_0, 0, \leftarrow)$

$(q_0, 0, q_1, 1, -)$

$(q_0, \#, q_1, 1, -)$

La MdT del successore

Per esempio: dato #0011#, calcolare #0100#

- Testina a destra sull'ultima cifra
- Alfabeto: $\{0, 1, \#\}$
- Stati: $\{q_0, q_1\}$
- Stato iniziale: q_0
- Programma:

$(q_0, 1, q_0, 0, \leftarrow)$

$(q_0, 0, q_1, 1, -)$

$(q_0, \#, q_1, 1, -)$

Una macchina che calcola

- Stato interno
- Posizione della testina
- Configurazione del nastro
- Computazione: successione di configurazioni
- Se non vi sono quintuple applicabili, la macchina si ferma
- Computazioni finite e infinite

Un commento un po' acido

Turing's "machines": These machines are humans who calculate.

*[L. Wittgenstein,
Remarks on the Philosophy of Psychology, Vol. 1,
Blackwell, Oxford, 1980.]*

La macchina universale

- Un'unica macchina, U , simula tutte le altre
- Il suo “programma cablato” è un programma di emulazione della macchina che è il suo dato
- U è un **calcolatore a programma memorizzato**
- L'intuizione di von Neumann

Limitazione della Macchina di Turing?

- Esistono costruzioni **non** calcolabili da nessuna macchina?
- Esistono numeri reali la cui espansione decimale **non** è prodotta da nessuna macchina
- Esistono problemi la cui soluzione non può essere calcolata: Problemi **indecidibili**.

Limitazione della Macchina di Turing?

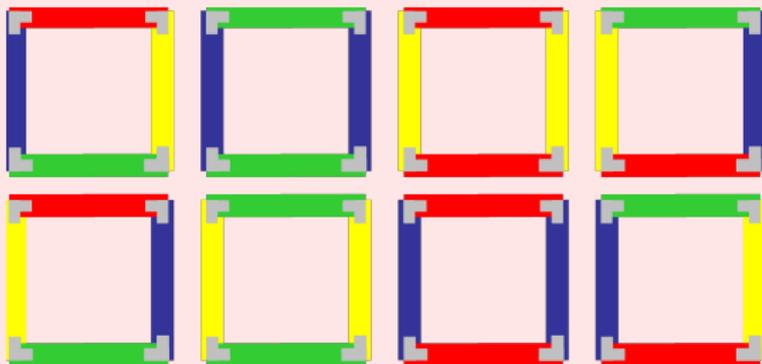
- Esistono costruzioni **non** calcolabili da nessuna macchina?
- Esistono numeri reali la cui espansione decimale **non** è prodotta da nessuna macchina
- Esistono problemi la cui soluzione non può essere calcolata: Problemi **indecidibili**.

Descrizione digitale

- La descrizione digitale della realtà
- È intrinsecamente **diversa** da quella fisica usuale che usa geometria continua/eq. differenziali
- Il calcolabile ha dei “buchi” nel continuo

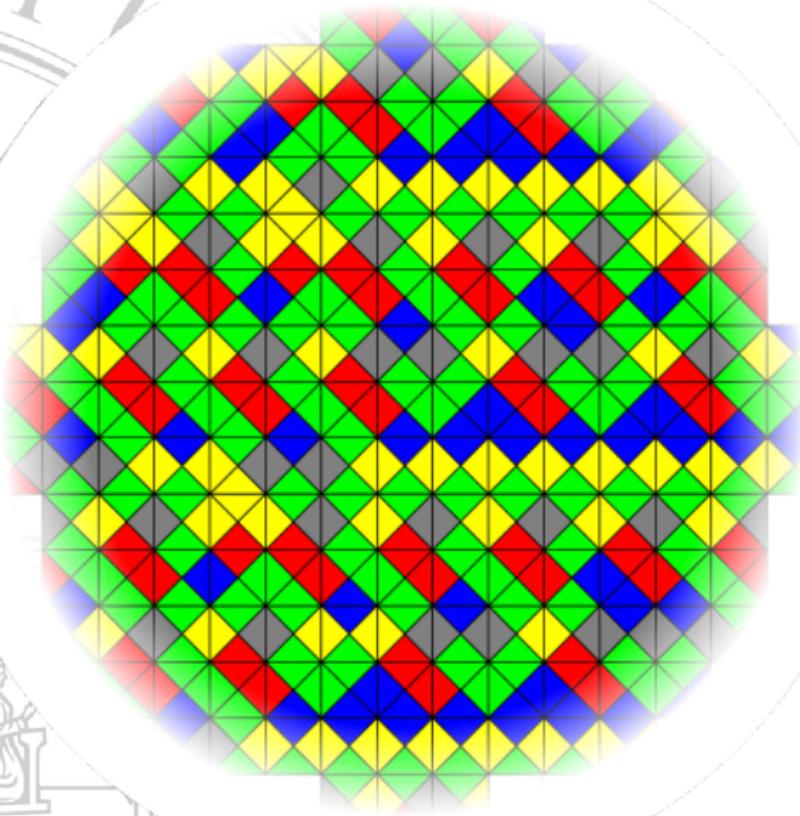
Un problema non decidibile

Piastrelle di Wang

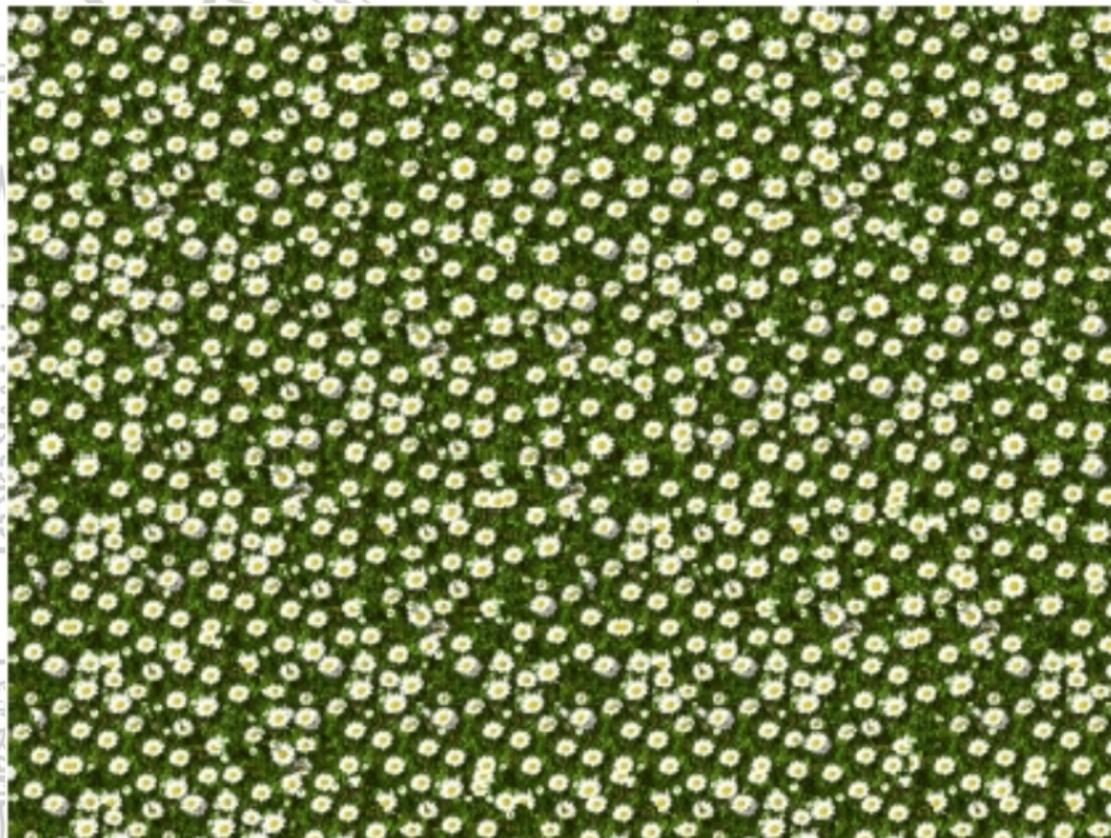


Dato un insieme di piastrelle,
decidere se possono piastrellare il piano

Piastrellature non periodiche



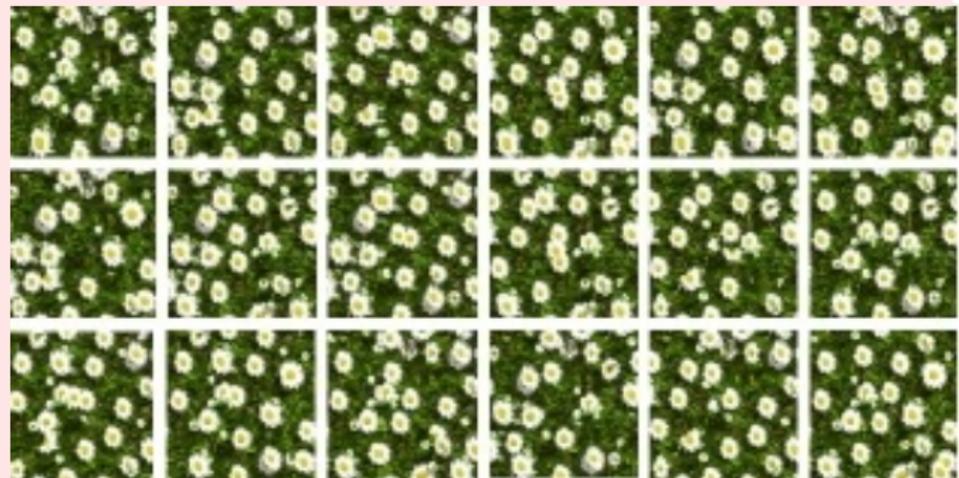
Un prato *non periodico* di margherite



... semi-sintetiche!



Input



Piastrelle sintetizzate a partire dall'input

Sorpendente!

- Altre definizioni della calcolabilità

Turing: \mathcal{T}

Kleene: \mathcal{R}

Gödel: equazioni ricorsive

Church: λ -calcolo

Post: sistemi di riscrittura

Kolmogorov

...

e tutti i linguaggi di programmazione!

- Sono tutti equivalenti

*La classe delle funzioni calcolabili
è indipendente dal linguaggio in cui è definita*

Sorpendente!

- Altre definizioni della calcolabilità

Turing: \mathcal{T}

Kleene: \mathcal{R}

Gödel: equazioni ricorsive

Church: λ -calcolo

Post: sistemi di riscrittura

Kolmogorov

...

e tutti i linguaggi di programmazione!

- Sono tutti **equivalenti**

*La classe delle funzioni calcolabili
è indipendente dal linguaggio in cui è definita*

Il concetto di calcolo e di calcolabile:

- Permette la descrizione della **realtà** (non solo del virtuale!)
- Permette di spiegarla
- Permette di **modificarla**

in modi nuovi e irriducibili alle altre scienze.

Ambient intelligence: sensing and actuation

Smart cities and homes

Il concetto di calcolo e di calcolabile:

- Permette la descrizione della **realtà** (non solo del virtuale!)
- Permette di spiegarla
- Permette di **modificarla**

in modi nuovi e irriducibili alle altre scienze.

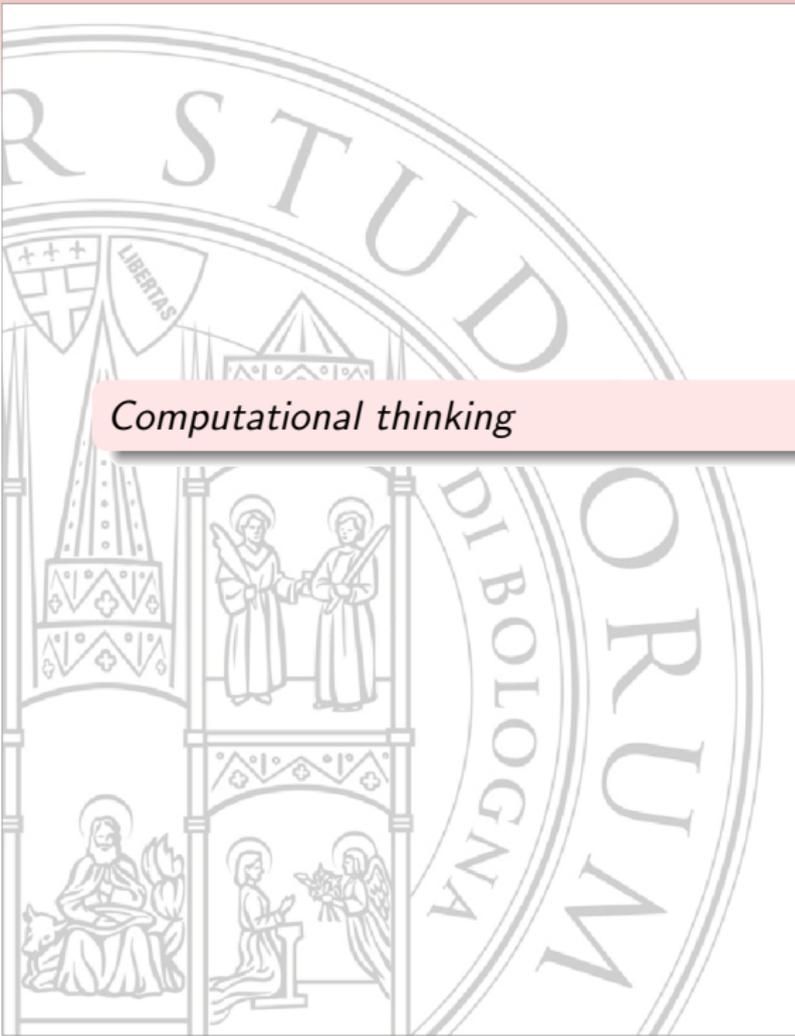
Ambient intelligence: sensing and actuation
Smart cities and homes

Informatica: tre cose

- Un insieme di **applicazioni**
- Una **tecnologia** che rende possibili quelle applicazioni
- Una **scienza** che fonda quella tecnologia

Linguaggi cosiddetti *di programmazione*

- Prescrizione del calcolo: marginale
- Astrazione: centrale
 - del problema
 - della soluzione
 - delle interazioni interne
 - delle interazioni con l'esterno

The background of the slide features a large, faint watermark of the seal of the University of Bologna. The seal is circular and contains the text "R STUD" at the top, "DI BOLOGNA" on the left, and "ORUM" at the bottom. The central part of the seal depicts a building with a tower and two figures, and below that, a seated figure and a kneeling figure. A shield with a cross and the word "LIBERTAS" is also visible.

Computational thinking