Einstein e la matematica

Nell'agosto 1912, così Einstein si rivolge all'amico e compagno di studi Marcel Grossmann:

"Grossmann, aiutami, altrimenti divento pazzo!"

In quel tempo, Einstein era già un fisico affermato, professore di Fisica Teorica presso il Politecnico di Zurigo.

- Qual è il problema che tormenta Einstein in questo momento?

Da un paio d’anni, Einstein ha ripreso la ricerca di una nuova teoria fisica, che unifichi e fonda insieme spazio, tempo e gravità, quella che sarà poi la relatività generale.

Per Einstein, spazio e tempo sono legati tra loro come punti di una sorta di superficie a quattro dimensioni.

Una superficie che è “piatta” in assenza di corpi, ma che diventa “curva” in presenza di corpi, un po’ come una membrana su cui appoggiamo oggetti pesanti.

Einstein però non riesce a esprimere questa intuizione trasformandola in teoria fisica.

Come dirà più tardi, si trovava dominato dalla frustrante sensazione che gli mancassero le parole per esprimere i propri pensieri, gli mancava cioè una matematica adeguata. Sino a questo momento, la matematica di cui disponeva era stata sufficiente per tradurre in concetti le sue intuizioni. Ora non più.

L’amico Grossmann inizia una ricerca bibliografica e presto si imbatte nell’opera di Gregorio Ricci Curbastro, professore presso l’Università di Padova che negli ultimi anni ha sviluppato – un po’ tra il disinteresse e lo scetticismo generali – un nuovo strumento di analisi geometrica: il calcolo differenziale assoluto.

Gregorio Ricci Curbastro era nato nel 1853 a Lugo, in provincia di Ravenna, da una nobile famiglia di possidenti. Figura modesta e schiva, dall’aspetto di un gentiluomo di campagna, aveva concentrato il suo interesse sullo studio della geometria differenziale delle *varietà di dimensione arbitraria*, sulla linea aperta qualche decennio prima da Riemann e Gauss.

- Che cosa sono le varietà?

  Ad esempio, le varietà di dimensione 1 sono le curve (nel piano, nello spazio), le varietà di dimensione 2 sono le superficie.

- Perché diciamo che una curva ha dimensione 1?

  Perché possiamo individuare un punto su di essa con un solo numero (per esempio la distanza da un punto fissato).

  Invece, per descrivere un punto su una superficie ci occorrono due numeri (pensiamo alla latitudine e alla longitudine sulla superficie terrestre).

  Con uno sforzo di astrazione possiamo pensare ad oggetti – le varietà appunto – i cui punti possono essere individuati solo da 3, 4, 100 numeri, che chiameremo coordinate del punto. Questi oggetti saranno varietà di dimensione 3, 4, 100.

Naturalmente non possiamo “vedere” o “disegnare” oggetti di questo genere, perché non potremo mai “rappresentare” un oggetto a 4 dimensioni nel nostro spazio a 3 dimensioni. Lo spazio-tempo di Einstein è ad esempio una varietà di dimensione 4: 3 dimensioni per lo spazio, più una per il tempo.

Su una superficie (in generale, su una varietà) ci sono infiniti modi di fissare un sistema di coordinate. Pensiamo all'esempio più semplice: sulla superficie della terra le coordinate geografiche dipendono dalla scelta dei poli e del meridiano di Greenwich, ma noi potremmo fissare altri poli e altri meridiani di riferimento, e coordinate diverse descriverebbero gli stessi punti.

Il problema centrale per Ricci è quello di comprendere la curvatura di una varietà, come cioè una varietà si discosta da un piano.

Per descrivere completamente la *curvatura di una varietà*, Ricci introduce un nuovo concetto matematico, quello che più tardi verrà chiamato *tensore*.

Un tensore è un oggetto matematico molto complesso da maneggiare (e questo spiega l’iniziale riluttanza del mondo a matematico ad accettarlo), che descrive simultaneamente il comportamento di numerosi parametri (ad esempio quelli che descrivono compiutamente la curvatura di una varietà).

Quello che è fondamentale nella teoria di Ricci è che i tensori che descrivono una varietà *cambiano con la scelta di un diverso sistema di coordinate, ma non le loro relazioni: ecco il calcolo differenziale assoluto*.

Un calcolo cioè che è indipendente dal sistema di coordinate scelto, come deve essere una legge fisica che è la stessa, indipendentemente dalle coordinate che utilizziamo per descrivere il mondo (in questo caso, una varietà 4-dimensionale: lo spazio tempo).

Questo è linguaggio e il sistema mentale di cui Einstein ha bisogno per la relatività generale, in cui (semplificando al massimo), lo spazio-tempo è una varietà 4-dimensionale, le masse dei corpi modificano la curvatura, e la curvatura è la gravità.

Le equazioni fondamentali di Einstein per descrivere l’universo contengono precisamente quello che ora viene chiamato “il tensore di Ricci” di questa varietà.

Con la teoria della relatività generale, il calcolo differenziale assoluto, fino a quel momento giudicato perlopiù un raffinato esercizio intellettuale utilizzato però – secondo molti – per riottenere risultati noti in modo molto più complicato, diventa uno dei grandi passi del pensiero matematico.

Ricci e Einstein si incontreranno solo nel 1921, quando Einstein, in occasione di un convegno a Bologna, volle andare a Padova a conoscere di persona Ricci.

Nel 1952 Einstein scriverà:

La teoria della relatività è un meraviglioso esempio di come la matematica ha fornito lo strumento teorico per una teoria della fisica, senza che il problema di fisica abbia avuto un ruolo risolutivo per le corrispondenti creazioni matematiche. I nomi di Gauss, Riemann, Ricci, Levi-Civita e le loro opere apparterrebbero ai contributi importanti del pensiero occidentale anche se questi non avessero portato al superamento dei sistemi inerziali.